



Matematiikan harjoituskoe, pitkä oppimäärä

max 60 p

Vastaa kymmeneen tehtävään, koeaika 6 h. Sallitut apuvälineet funktiolaskin ja taulukot.

1. Ratkaise yhtälöt

a) $(x+3)(x-1)(2x-1) = 0$

b) $(x+3)(x-1)(2x-1) = 3$

c) $(x+3)(x-1)(2x-1) = 3(x-1)$

2. Määritä funktion $f(x) = x^3 e^{-2x}$ derivaatan nollakohdat.

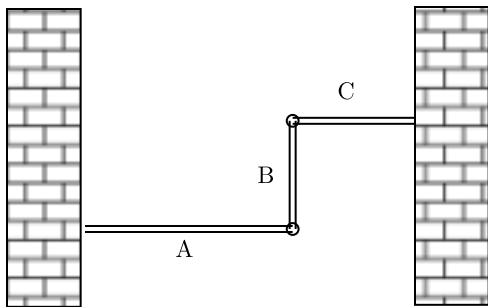
3. Laske integraali $\int_{-3\pi/2}^{\pi/2} |\sin(2x)| dx$.

4. Määrää kaikki kulmat $\alpha \in [0, 2\pi]$, joille

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

5. Määritä vektorin $\vec{c} = 3\vec{a} - \vec{b}$ pituus, kun $|\vec{a}| = \sqrt{5}$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$ ja $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$. Laske myös vektoreiden \vec{a} ja \vec{c} välinen kulma asteen tarkkuudella.

6. Kahden tiilimuurin välissä on toisiinsa nivelillä liitettyjen tankojen A, B ja C muodostama rakenne. Tankojen väliset kulmat ovat aluksi suoria. Kuinka paljon tankoa A on kierrettävä ylöspäin, jotta tanko B olisi vaakasuorassa? Anna vastaus asteen kymmenesosan tarkkuudella.



Tankojen pituudet
A: 50 cm, B: 30 cm, C: 30 cm

13. Määritellään funktio $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ kaavalla $f(x) = x \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{x}\right) - \frac{x}{2}$.

a) Määritä raja-arvo $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ tulkitsemalla funktion lauseke sopivan funktion erotusosamääräksi.

b) Mitä voidaan sanoa raja-arvosta $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?

7. Kaivoksen malmimäärän arvioidaan riittävän nykyisellä louhintatahdilla 30 vuodeksi. Kuinka moneksi vuodeksi malmi riittää, jos louhittava määrä kasvaa vuosittain 2 %?

8. Osoita, että ympyröiden $x^2 + y^2 - 4xt - 2yt = 4 - 5t^2$, $t \in \mathbb{R}$, keskipisteet sijaitsevat samalla suoralla. Määritä kyseisen suoran leikkauspisteet sellaisen paraabelin kanssa, jonka johtosuora on $y = -3$ ja polttopiste $(0, -1)$.

9. Laske sen alueen ala, jonka rajaavat käyrä $y = \sqrt{2x+5}$, tälle kohtaan $x = 2$ piirretty tangentti sekä x -akseli.

10. Erään lukion opiskelijoista 55 % kirjoittaa pitkän matematiikan ja 20 % fysiikan. Kummankin aineen kirjoittaa 12 %. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu opiskelija a) ei kirjoita kumpaakaan ainetta, b) kirjoittaa matematiikan mutta ei fysiikkaa, c) kirjoittaa vain joko matematiikan tai fysiikan, mutta ei molempia?

11. Rasia mansikoita maksoi torilla 7,80 euroa ja rasia mustikoita 6,20 euroa. Myytyään marjoja yhteensä 1216,20 euron edestä torimyyjä huomasi, ettei ollut eritellyt mansikoiden ja mustikoiden myyntejä. Kuinka monta rasiaa kumpaakin marjaa oli myyty, kun molempia oli varmuudella mennyt yli 60 rasiaa?

12. Luvulle $\sqrt{2}$ voidaan laskea likiarvoja rekursiokaavalla

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right), \quad x_0 = 2.$$

a) Laske likiarvot x_1 , x_2 ja x_3 .

b) Osoita, että jono todella suppenee kohti lukua $\sqrt{2}$. Opastus: Osoita, että jono on aidosti monotoninen ja rajoitettu.